ETH Zürich FS 2020
D-INKF
Prof. J. Teichmann

Koordinator
Konstantin Rusch

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 6

1. Wähle aus der folgenden Liste zu jeder Situation (jeder Zufallsvariablen) eine Verteilung, die Du am ehesten für passend ansiehst!

Situationen:

a) $X^{(a)}$ sei die Anzahl der Lokomotiven der SBB, die in der nächsten Woche einen Defekt haben.

b) $X^{(b)}$ sei die Lebensdauer in der Schweiz im 17. Jahrhundert.

c) $X^{(c)}$ sei der Rundungsfehler einer Messung, die auf eine Stelle nach dem Dezimalpunkt gerundet ist.

d) $X^{(d)}$ sei die Anzahl der Gewinner mit 4 Richtigen im Schweizer Zahlenlotto im Jahr 2018.

e) $X^{(e)}$ sei die Anzahl fauler Äpfel in einer Packung zu 6 Stück.

f) $X^{(f)}$ sei die Lebensdauer (in Jahren) eines radioaktiven Teilchens.

g) $X^{(g)}$ sei der Wirkstoffgehalt (in mg) einer Tablette.

h) $X^{(h)}$ sei der Nadelverlust (in %) einer zufällig ausgewählten Fichte eines Schweizer Gebirgswaldes.

i) Jemand würfelt bis zur ersten 6. Sei $X^{(i)}$ die Anzahl der Würfe, die es dazu braucht.

j) Wir untersuchen den Kariesbefall von 467 Kindern. Dazu zählen wir bei jedem Kind die Zahl der kariösen/gefüllten Zahnflächen. Sei $X^{(j)}$ die Anzahl der kariösen/gefüllten Zahnflächen dieser Kinder.

Liste der Verteilungen:

- Binomial
- Geometrische Verteilung
- Poisson
- Andere diskrete Verteilung
- Normal

- Exponential
- Uniform (Gleichverteilung)
- Andere stetige Verteilung

2. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 + 16xy + 6y^2, & (x,y) \in D = [0, \frac{1}{4}] \times [0,1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Weisen Sie nach, dass f auf $\mathbb{R}^2$ tatsächlich eine Dichte ist.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $E[X]$ und $E[Y]$.

c) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Y.

d) Sind X und Y unabhängig? Begründung?

e) Berechnen Sie den bedingten Erwartungswert $E[Y|X = \frac{1}{8}]$.

3. Seien X und Y die Lebensdauer zweier Maschinen, "Maschine 1" bzw. "Maschine 2", in Monaten. Die beiden Variablen sind unabhängig und exponentialverteilt:

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1) \text{ mit } \lambda_1 = \frac{1}{10}, \quad Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2) \text{ mit } \lambda_2 = \frac{1}{15}$$

a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Maschine 1 mehr als doppelt so lange funktioniert wie Maschine 2?

b) Wenn man weiss, dass Maschine 1 nach 4 Monaten kaputt war, was ist dann die erwartete Lebensdauer der Maschine 2?

4. Bei den folgenden Fragen ist jeweils genau eine Antwort richtig.

a) Es seien X und Y Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}(X) = 3$ und $\mathrm{Var}(Y) = 1$. Dann gilt:

1. $\mathrm{Var}(X - Y) = 2$.
2. $\mathrm{Var}(X - Y) = 4$.
3. Es gibt zu wenig Information, um $\mathrm{Var}(X - Y)$ zu berechnen.

b) Es seien X und Y unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Varianz $\sigma^2 > 0$. Dann gilt:

1. $\mathrm{Var}(X + X - Y) = 3\sigma^2$.
2. $\mathrm{Var}(X + X - Y) = 5\sigma^2$.
3. $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(2X)$.

c) Seien X und Y zwei diskrete unkorrelierte Zufallsvariablen mit Wertebereichen W_X und W_Y. Dann gilt:

1. X und Y sind unabhängig.
2. $P(X = x|Y = y) = P(X = x)$ für alle $x \in W_X$ und $y \in W_Y$.
3. $E(XY) = E(X)E(Y)$.

d) Es seien $X \sim \text{Poisson}(10)$ und $Y = X + 5$. Dann gilt:

1. $\text{Corr}(X, Y) = 1$.
2. $Y \sim \text{Poisson}(15)$.
3. $\text{Cov}(X, Y) = 15$.

e) Sei (X, Y) eine stetige Zufallsvariable mit einer uniformen Verteilung auf dem Viereck mit Ecken $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ und $(0, -1)$. Dann gilt:

1. Die Randverteilung von X ist $\text{Uniform}(-1, 1)$.
2. Für (x, y) in dem Viereck gilt $f_{X,Y}(x, y) = 1/2$.
3. X und Y sind unabhängig.

f) Wir betrachten die gemeinsame Verteilung von zwei Zufallsvariablen X und Y. Dann gilt:

1. Aus der gemeinsamen Verteilung kann man immer die Randverteilungen berechnen.
2. Aus den Randverteilungen kann man immer die gemeinsame Verteilung berechnen.
3. Aus den Randverteilungen und $\text{Cov}(X, Y)$ kann man immer die gemeinsame Verteilung berechnen.
4. Es gilt immmer, dass $\text{Cov}(X, Y) \geq \text{Corr}(X, Y)$.